

“结构化”视角下的数的运算一致性教学策略探究

黄佳瑜

(江苏省常熟市珍门中心小学 江苏常熟 215500)

摘要: 2022年4月21日,新版《义务教育课程方案和课程标准》正式颁布,首次强调课程内容的组织,“重点是对内容进行结构化整合,探索发展学生核心素养的路径”,是本次课程修订的重要理念。本文以《小数乘整数》《分数乘整数》跨年度的两节课为例,探究在结构化视角下的大单元整体教学,关注数的运算一致性,促进学生对知识本质的理解,促进学生发生知识联结,最终指向核心素养。

关键词: 结构化; 数的运算一致性; 单元整体; 教学策略

前言

《义务教育课程标准》强调,要设计体现结构化特征的课程内容。由于现有的教材还是旧的,如何使用旧的教材跟上新的理念,这就需要教师对课程内容进行结构化整合。重视学科结构,是以学科逻辑为主线,以有助于学生理解和促进学生发展为目的的课程设计理念。布鲁纳认为,“简单地说,学习结构就是学习事物是怎样相互关联的”。学习内容的这种关联是通过学科的核心概念实现的,在结构化的内容体系中,知识之间不是孤立的、互不相干的,学科知识之间是相互关联的,打通知识之间关联的钥匙就是学科的基本原理。

目前苏教版的小学教材,是通过实际意义引导学生掌握整数、小数、分数的乘法运算。但是,如果小学数学始终不能脱离现实背景和实际意义,不让学生感悟整数、小数、分数乘法运算的一致性,就会让学生认为数学的知识是零散的,数学的方法是独立的。这不仅不利于学生的记忆,更重要的是,不利于学生把握数学的本质,不利于学生形成和发展符号意识等与抽象思维有关的核心素养。这里所说的一致性就是要经历一个再抽象的过程,使得数的运算摆脱现实背景和实际意义,实现数的运算的一般性,也就是经历一个数学化的过程。正如弗赖登塔尔所说,“没有数学化就没有数学。数学化是数学教育的必然趋势,能够保证实现数学整体结构的广阔途径。”本学期,我们数学教研组围绕苏教版小学数学五年级上册《小数乘整数》和六年级上册《分数乘整数》两节课进行了课例研究,主要探索在结构化视角下数的运算一致性的教学策略。

一、以结构化的内容定位运算本质

探寻乘法运算的算理与算法,当然可以简单地还原成加法,但是如果乘法运算一直依附于加法,就失去了它成为加法简便运算的优势了。因此,乘法要建构自己独立的算理和算法。

1. 教材分析显冲突

《小数乘整数》是苏教版五年级上册第五单元的起始课。教材在三年级下册教学小数初步认识的基础上,将有关小数的意义、性质和运算的内容编排在五年级上册,依次在第三单元教学“小数的意义和性质”,第四单元教学“小数的加法和减法”,第五单元教学“小数的

乘法和除法”,充分体现了学生整体建立有关小数的意义和运算的认知结构。

《分数乘整数》是苏教版六年级上册第二单元的起始课。教材在三年级上册和下册均编排了分数的意义,教学将一个物体或一个整体平均分,在五年级下册教学将“单位1”平均分、分数的加法和减法,分数的安排同样遵循了学生的认知规律,体现螺旋式上升的特点。

根据学生的年龄特点和认知水平,教材在五年级先学习小数乘法,再到六年级学习分数乘法,且小数乘法是转化成整数乘法来计算的,其计算方法的推导与小数乘法的意义联系不大。因此,教材淡化了小数乘法的意义的教学,把重点放在了算理和算法的总结上,并将积的变化规律作为理解小数乘法的算理和算法的主要途径和一般方法。教学分数乘整数,通常联系分数乘法的意义,从而得出算法。两者的教学都是从算法中归纳出算理,在算理中总结出算律。但在数学的结构和数学的教学中是算律确定算理,算理确定算法,似乎现在的教学方式有点本末倒置了。

而且在学生看来,小数和分数除了在意义上有所联系,那就是一位小数表示十分之几,两位小数表示百分之几,三位小数表示千分之几……在算法上是独立的,小数乘法和分数乘法均有它独立的计算方法,并不利于学生真正理解算理,掌握算法。

2. 内容勾联寻本质

那么,怎样才能建立起小数乘法和分数乘法之间的勾联呢?《义务教育课程标准》指出,数的运算教学要注重对整数、小数和分数四则混合运算的统筹,让学生进一步感悟计数单位在运算中的作用,感悟运算的一致性。对于乘法运算来说,无论是整数乘法、小数乘法,还是分数乘法,本质上都是计数单位的不断累加。因此,在教学中要紧紧抓住“计数单位”这个核心概念,建立起以“计数单位”为统领的乘法运算的整体结构,让学生在学习活动中不断感悟数的运算在本质上的一致性,从而促使学生加深对运算本质的理解,提升学生的运算能力和推理能力。

二、以结构化的视角构建运算联系

基于以上的认识,我们在结构化视角下,跨年级整体设计这两

节课,以“计数单位”为核心概念建立知识的“承重墙”,打通知识之间的“隔断墙”,让学生感悟到小数乘法运算、分数乘法运算与之前学习的整数乘法运算三者之间并不是孤立的,而是有内在联系的。遵循数学知识发生、形成和发展过程组织教学,既是学生建立合理认知结构的需要,也是学生发展思维能力的需要。教师在教学中着眼于知识的整体结构,引导学生从已有的知识经验出发,自主经历数学知识探索与发现的过程。

1.沟通意义,追本溯源

(1)沟通意义的一致性

片段一:《分数乘整数》

1.提问:你能很快算出这些算式的结果吗?

$$11+11+\dots+11=$$

20个

$$0.7+0.7+0.7+0.7=$$

指名口答,出示: $11+11+\dots+11=11 \times$

$$20=2200.7+0.7+0.7+0.7=0.7 \times 4=2.8 \quad 20个$$

提问:为什么想到用乘法计算?是不是所有加法算式都能写成乘法?怎样的加法算式能写成乘法?

小结:整数乘法和小数乘整数就是求几个相同加数的和的简便运算。

再板贴出示:

$$2/11+2/11+2/11=$$

$$3/8+3/8+3/8+3/8=$$

提问:我们三年级学过同分母分数加法,怎样计算呢?指名口答结果。

质疑:根据整数乘法的意义,你们有什么猜想?

$$出示: 2/11+2/11+2/11=2/11 \times 3? \quad 3/8+3/8+3/8+3/8=3/8 \times 4?$$

揭题:分数加法和乘法之间又有怎样的联系呢?今天这节课,我们就一起来探究分数乘整数的意义和计算方法。(板书课题)

《分数乘整数》的导入环节,复习了整数乘法和小数乘整数的意义,即求几个相同加数的和的简便运算。然后出示两个加法算式,每个加数都是相同的分数,引导学生猜想这两个分数加法和乘法之间有这样的联系,从而引出课题。因为分数乘法的意义同样是求几个相同加数的和的简便运算,与旧知是相关联的。

(2)渗透运算的一致性

片段二:《小数乘整数》

(一)基于单位,理解口算理

1.师: 0.8×3 等于多少呢?把你的想法写在学习单上。

预设①:用加法算:可以用3个0.8相加。

师: 0.8×3 可以理解成3个0.8相加,他结合了乘法的意义,还利用了刚学过的小数加法知识,将新知转化为旧知,真会学习!

预设②:换算成“角”算: $0.8 \text{元}=8 \text{角}$ $8 \times 3=24$ (角) $24 \text{角}=2.4 \text{元}$

师:这位同学借助生活经验,通过元和角的换算,0.8元转化成

8角,小数0.8元转化成整数8角来计算,很不错!

预设③:先算 $8 \times 3=24$,再点出一位小数,就是2.4。

师追问:你能说说这样算的道理吗?

(0.8是8个0.1,8个0.1乘3一共有24个0.1,就是2.4)

利用小数的计数单位,算出了 $0.8 \times 3=2.4$ 。

2.师:如果要买7个羽毛球,需要多少元呢? ($0.8 \times 7=5.6$ 元)你是怎么算的?

如果要买7个信封,需要多少元呢?

师:先算的是什么? (8×7) 还是 8×7 ,结果为什么是0.56,而不是5.6了?(原来0.8和0.08的计数单位不同,与7相乘后,积的计数单位也跟着变化)

如果计算 0.008×7 ,结果是多少?(生快速口答0.056)

3.师:(指着黑板上的算式)一起来看,我们口算这些算式时有相同的地方吗?(都是先看作整数乘法来计算)。

《小数乘整数》,创设商店购物的情境,利用“单价 \times 数量=总价”这一数量关系,引出一系列乘法算式。 8×3 ,想三二四这句口诀,实际上想8个一乘3得24个一; 0.8×3 ,也想 $8 \times 3=24$,所以 $0.8 \times 3=2.4$ 。引导学生理解这里的8和刚才的8却不一样了,这里的8表示8个0.1,乘3得24个0.1,是2.4。然后通过口算 0.8×7 、 0.08×7 、 0.008×7 ,学生能感受到都是算的 8×7 ,只不过小数点移动了而已。再追问:都算是 8×7 ,为什么结果却不一样,再次感受因为乘数的计数单位在发生变化,积的计数单位也随之变化。

(二)沟通理法,把握本质

(1)计数单位明本质

在《分数乘整数》一课中,当学生得出了“分数乘整数,分母不变,分子与整数相乘的积作分子”的计算法则以后,适时追问:分母不变,就是什么不变?引导学生将目光聚焦到计数单位,发现也就是计数单位不变。由于六年级的学生以往没有接触到数的运算一致性,并不了解分数乘法与以前学习的整数乘法、小数乘法还有这样的关联,所以教师引导学生一起观察:其实,这和整数乘法、小数乘整数的算法是一致的。我们看,整数乘法中,实际上就是算11个一加11个一……一共有20个11个一,一共得220个一,计数单位还是一;小数乘整数中,7个0.1加7个0.1加7个0.1加7个0.1,一共有28个0.1,计数单位也没变;再看分数乘整数,3个 $1/10$ 加3个 $1/10$ 加3个 $1/10$,一共有9个 $1/10$,分数单位也没变。分数乘整数,实际上就是相同个数计数单位的累加。

在《小数乘整数》一课中,当学生用不同的方法计算得出 $0.8 \times 3=2.4$ 以后,教师适时小结:你们用元角分的知识来算,用8角乘3先算的是 8×3 ,得24角也就是2.4元;还是想多少个0.1来算,用8个0.1乘3,先算的也是 8×3 ,得24个0.1也是2.4元,看来小数乘整数和我们之前学过的整数乘法是有联系的。用0.1这个计数单位去乘得到的还是几个0.1,小数乘整数还是在算有多少个这样的计数单位。

两节课都引导学生将目光投射到“计数单位”，沟通了乘法运算之间的联系，感悟乘法运算实际上是在计算计数单位的个数，加深学生对乘法的意义和算理的理解，实现了算理结构化，从而促进学生思维结构化的发展。

(2) 竖式辨析寻关联

但是小数乘整数的竖式计算写法还是存在着一定的难度。在教学 2.35×3 时，教师预设到：即使教师先入为主地教学正确的对齐方式，可还是有同学会受小数加减法相同数位对齐的负迁移而写出不规范的竖式。所以教师选择将“ 2.35×3 ”竖式中应该是“末尾对齐”还是“相同数位对齐”这个问题抛出，引起学生思辨。由表及里，透过形式看本质，通过唤醒学生对于整数乘法末尾对齐的计算经验，利用正向迁移，打通小数乘整数与整数乘整数之间的关联，即让学生“知其然，并知其所以然”。更为重要的是，在辨析的过程中，学生感受到了计算的本质，即计算有多少个这样的计数单位。

三、以结构化的模型促进思维进阶

纵观整个乘法运算，我们可以建构数的运算一致性框架：一个核心概念：即计数单位；一些基本规律：运算律与等式的基本性质；一些基本运算，即计数单位与计数单位运算，计数单位上的数字与计数单位上的数字运算；一些基本事实，即乘法口诀。

基本规律：运算律 等式的基本性质

↓

计数单位 (核心概念)

↓

基本运算：计数单位与计数单位相乘

计数单位上的数字与计数单位上的数字相乘

↓

基本事实：乘法口诀

为了让学生对整数乘法、小数乘法、分数乘法的运算一致性有更深入的理解，教师还需要在学生学完这些乘法运算后对这些算理进行梳理、归纳，进行融会贯通的复习，实现算理贯通，算法统整。

整数乘法运算。例如： $48 \times 2 = 40 \times 2 + 8 \times 2 = (4 \times 10) \times (2 \times 1) +$

$(8 \times 1) \times (2 \times 1) = (4 \times 2) \times (10 \times 1) + (8 \times 2) \times (1 \times 1) = 96$ 。

小数乘法运算。例如： $3.8 \times 3.2 = (3 + 0.8) \times 3.2 = 3 \times 3.2 + 0.8 \times 3.2 = (3 \times 32) \times (1 \times 0.1) + (8 \times 32) \times (0.1 \times 0.1) = 12.16$ 。至于 0.1×0.1 为什么等于 0.01 ，可以引导学生思考： $0.1 = 1/10$ ， $1/10 \times 1/10 = 1/100 = 0.01$ 。

分数乘法运算。例如 $9/10 \times 3/10 = (9 \times 1/10) \times (3 \times 1/10) = (9 \times 3) \times (1/10 \times 1/10) = 27/100$ 。

整体的、结构的、深度的学习能帮助学生理解知识之间的内在联系，构建知识体系。在体会数的运算一致性的过程中，在推演算理、推导算法的过程中，学生感悟到乘法运算的本质就是计数单位的累加，即计数单位与计数单位相乘，计数单位上的数字与计数单位上的数字相乘，学生的运算能力和推理能力都得到了提升。这样结构化的复习整理，既是知识的结构化，也是思想方法的结构化，回归知识的本质，让学生的知识结构、认知结构、思维结构全面成长。

四、结语

总之，学生建立对数的运算一致性的感悟是一个渐进的过程，教师不可急于求成，而要静待花开。在教学中，教师要重视对教学内容的整体分析，深化对数学知识本质的理解，提炼能建立数学知识间的结构与联系，发挥核心作用的数学概念，由此建构结构化视角下单元整体教学的脉络清晰、相互联系的数学知识体系，进而帮助学生学会用整体的、联系的、发展的眼光看待问题，形成科学的思维，发展数学核心素养。

参考文献：

[1] 巩子坤, 史宁中, 张丹. 义务教育数学课程标准修订的新视角: 数的概念与运算的一致性[J]. 课程. 教材. 教法, 2022, 42(6): 45-51+56.

[2] 赵莉, 吴正宪, 史宁中. 小学数学教学数的认识与运算一致性的研究与实践——以“数与运算”总复习为例[J]. 课程. 教材. 教法, 2022, 42(8): 122-129.

[3] 马云鹏. 聚焦核心概念落实核心素养——《义务教育数学课程标准(2022年版)》内容结构化分析[J]. 课程. 教材. 教法, 2022, 42(6): 35-44.